MAI 1 – řešení 6. domácího úkolu

A opět platí – nechte se dostat k cíli „i cestou jinou". A pozor, případné „chyby" mi „hlaste"!

1. Důkazy limit „z definice"

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$

Dokázat, že $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$ znamená ukázat, že platí:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x:\ 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

(zde lze i jen $|x-1|<\delta$ (pro $x=1$ je $f(1)=0$, tj. platí – fce dokonce je v bodě $x=1$ spojitá – lze příkladi „změnit" na „dokažte, že fce $\frac{x-1}{x+1} = f(x)$ je spojitá v $x=1$")

A důkaz opět lze provést tak, že $\delta>0$, které hledáme tak, ať platilo $(*)$, najdeme pro jinou, jednodušší funkci (princip „shazování") – princip důkazu limity (resp. spojitosti) fce dle definice je vlastně (což máme vyzkoušeno) v tom, že „řešíme" nerovnici $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \varepsilon$ tak, abychom dostali odtud odhad $|x-1|<\delta$ – a to lze často „zjednodušenými" „požadavky" $(*)$:

Zde: $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq \frac{|x-1|}{1}$ pro $|x+1|>1$, což můžeme předpokládat, neboť hledáme $1-\delta < x < 1+\delta$, stačí uvažovat „$0<\delta<1$" (potřebujeme „nějaké" $\delta>0$), a pak $x>0$ a $|x+1| = x+1 > 1$

Tedy, aby platilo $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < |x-1| < \varepsilon$, stačí vzít $\delta = \varepsilon$!
(když $\varepsilon < 1$, jinak $\delta < \varepsilon$ a $\delta < 1$)

a nyní bychom ještě ověřit, že je „v pořádku" (*) – snad už zde „není třeba".

b) Dokázat, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ „znamená" ukázat, že platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k (>0)\ \forall x:\ x > k \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$$

A teď už „stručněji" – myšlenky minulého příkladu platí:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$$

a pro $x > 0$ (stačí – pro $k > 0$ definice „funguje")

tj. zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak „vezme" $k = \frac{1}{\varepsilon}$ (>0) a platí pro $x > k$:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{cbd.}$$

c) A chceme-li ukázat, že $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ (opět spojitost v bodě $x_0 = 4$), chceme ukázat že:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: (0 <)|x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon \,. \quad (*)$$

Technicky: chceme z $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$ „dostat" odhad pro $|x-4|$!

Zkusme: $$|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \le \frac{|x-4|}{2} \quad \left(\le \frac{|x-4|}{1}\right)$$

Tedy, když bude $\frac{|x-4|}{2} < \varepsilon$, tj. $|x-4| < 2\varepsilon$, bude platit i (*)
– stačí tedy zvolit $\delta = 2\varepsilon$ (z druhé nerovnosti i $\delta = \varepsilon$ – „slabší")
a důkaz je hotov.

Ale raději „ověříme": volme k danému $\varepsilon>0$.. $\delta = 2\varepsilon$;
pak „kdykoli" $|x-4| < 2\varepsilon$, je

$$\left|\sqrt{x}-2\right| = \frac{\left|\sqrt{x}-2\right|\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+2} = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{|x-4|}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon!$$

(a vyšlo – takže důkaz je doopravdy „hotov"!)

<u>A teď napíšu řešení příkladu 3</u> (a pak budu „počítat" ty limity)

3. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$, lze f dodefinovat v bodě $a=0$ spojitě, tj. lze definovat $f(0)$ tak, aby $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = f(0)$?

Hodná odpověď bude, pokud $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = L \in \mathbb{R}$, pak lze „dodefinovat" $f(0) = L$ (a spojitost je „zaručena" dle definice. Teď je tedy vlastní „slovní úloha" na výpočet limity:

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$$, tj. lze f dodefinovat

$$\left(\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = „-\frac{1}{0^+}" = -\infty \quad \text{(dle „pravidel")}\right)$$

spojitě v bodě 0: $\underline{f(0) = 0}$

(Zkuste si „představit" a načrtnout graf – „z limit", spojitosti a sudosti funkce, a monotonie – lze i bez derivací!)

Limity (příklad 2) –

a) $\displaystyle \underline{\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{x^2+1}} \underset{AL}{=} \frac{3\cdot 1+1}{1+1} = 2$ (spojitost v bodě $x=1$)

$\displaystyle \underline{\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{x^2-1}} = „\frac{4}{0}“$ ale (x^2-1) „mění“ znaménko v bodě $x=1$ – tedy limita oboustranná nebude existovat –

$\displaystyle \underline{\lim_{x\to 1+} \frac{3x^2+1}{x^2-1}} = „\frac{4}{0+}“ = +\infty$, – příslušné limity jednostranné!

$\displaystyle \underline{\lim_{x\to 1-} \frac{3x^2+1}{x^2-1}} = „\frac{4}{0-}“ = -\infty$ (dle „pravidel“ pro výpočet limit)

$\displaystyle \underline{\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-1}} = „\frac{\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \underset{AL}{=} 3 \quad \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = „\frac{1}{\infty}“ = 0\right)$

(zvídavějším „∞“ – lze pak už přesně jednodušeji uvažovat jen „nejvyšší“ mocniny v čitateli a jmenovateli)

tedy:

$$\underline{\lim_{x\to +\infty} \frac{3\sqrt{x}+1}{x^2-1}} = „\frac{\infty}{\infty}“ \underset{„přesně“}{=} (*) \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left(3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1\left(3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \underset{AL}{=} „\frac{1\cdot 3}{\infty\cdot 1}“ = 0$$

a odhadem (z (*)) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt{x}+1}{x^2-1} = 0$ neboť

u ∞: $\displaystyle \frac{3\sqrt{x}+1}{x^2-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ — a $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0 \left(„\frac{1}{\infty}“\right)$

(zde je „podrobně“ separátně, ale, pokud už toto „vidíte“, můžete „rychle“ použít – a umět jednoduše vysvětlit)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} x\,\frac{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \text{„}\infty\cdot\frac{3}{1}\text{"} = \infty$$

a „odhadem": $\frac{3x^2+1}{x-1} \underset{(u\ \infty)}{\cong} 3x$, $\lim_{x\to\infty} 3x = \infty \Rightarrow$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^2-4} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"}$$ – návod – „zviditelnit nuly podobně, jako v minulých příkladech ∞) – (a nuly „zkrátit")

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

Poznámka: úkol byl zadán ještě před „l'Hospitalovým pravidlem", tedy počítáme limity bez tohoto pravidla v případě $\frac{\infty}{\infty}$ nebo $\frac{0}{0}$ – ale můžete tyto příklady nyní řešit i pomocí „l'Hospitala" – vyzkoušejte, co je „lepší"!

b) $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \text{„}\infty - \infty\text{"} =$$ (opět neurčitý výraz – je dobré zkusit převést na podíl! – umíme „od" odmocnit!)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) =$ „$\infty-(-\infty)$" $= +\infty$ – tady žádný problém není! – ale občas si ten, kdo počítá limitu ten problém sám „udělá" – je třeba vždy udělat „rozbor" limity (já říkám „diagnózu") – tento příklad je tady proto – aby se dávalo pozor i na $x\to$? atd)

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) =$ „$\infty(\infty-\infty)$" $\overset{*}{=}$ (problém ještě horší!, ale opět – pomůže „podíl")

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} \overset{*}{=} \frac{1}{2} \text{ (odhadem)}$$

ale i přesně $\overset{*}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \underset{AL}{=} \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

A opět – pozor na „číst" limitu – pro $x\to-\infty$!

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) =$ „$-\infty\left(+\infty-(-\infty)\right)$" $\underset{AL}{=} -\infty$!

$-\infty\cdot(+\infty)$

c) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to0} e^x \underbrace{\dfrac{e^h-1}{h}}_{\to 1} \underset{AL}{=} e^x$

(„T-tabulková limita $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$)

(vlastně zde se „počítá" z definice $(e^x)' = e^x$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} = „\frac{0}{0}" \overset{*}{=}$$

návod – v limitě „$\frac{0}{0}$", kde je goniometrická (nebo i cyklometrická) fce, hledejte T: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ a pro exp T: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\cos x-1} \underset{AL}{=} 1\cdot(-2) = -2,$$ neboť:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} \underset{\substack{VLSF\\(x^2=y)}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} \underset{T}{=} 1,$$ a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{-1}{\cos x+1}$$

$$\underset{AL}{=} 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1} = -2$$

d) příklad na další „užitečnou „tahákovou" limitu:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$ („získá se" z $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} \underset{T}{=} 1$$

$\ln x = y$

$x = e^y$

$x\to 1 \Rightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{x} \underset{AL}{=} 1\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = 1$$

$\cos x = y$

$x\to 0 \quad y\to 1 \quad (a \cos x \neq 1 \text{ v } P(0))$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}\text{ (minulé příklady)}}\cdot x \underset{AL}{=} -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1-\frac{2}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right) = \text{„}\infty\cdot 0\text{“} \overset{*}{=}$$

návod: Heineho věta pomůže převést limitu posloupnosti na limitu funkce:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall (x_n),\ x_n \neq a \text{ a } x_n \to a \text{ je } \lim_{x\to a} f(x_n) = L$$

$$\overset{*}{=} \text{ („na podíl“)} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\ln(1-2y)}{y} \overset{**}{=}$$

a zde (opět užitím VLSF) se limita pro $x\to+\infty$ převede na T., tj. pro $y\to 0$

$\frac{1}{x} = y$, pro $x\to\infty$ je $y\neq 0$

$$= \lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{\ln(1-2y)}{-2y}}_{\to 1\ (VLSF)}\cdot(-2) = -2 \quad (\text{nebo k } (**) \text{ lze i } -\tfrac{2}{x} = t,\ t\to 0)$$

e) $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to 0} \sin y = 0$ (spojitost fce)

$x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x} = y \to 0$

(a $\frac{1}{x} \neq 0$ nebo zde lze užít spojitost fce místo –druhé předpokladu VLSF)

$\underline{\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to 0} \sin y = 0$ (–″–)

neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = „\frac{\infty}{\infty}" \left(\approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}\right) = 0$

$\underline{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{\to 1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \underbrace{\frac{3x}{\sin 3x}}_{\to 1} \underset{AL}{=} \frac{5}{3}$

$„\frac{0}{0}"$

$\underline{\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to -1} \underbrace{\frac{(x+1)}{\sin(x+1)}}_{\to 1 \text{ (VLSF)}} (x^2-x+1) \underset{AL}{=} 3$

opět hledáme „$\frac{\sin t}{t}$" pro $t\to 0$)

$\underline{\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to 1} \ln(y) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ (a $\ln y$ je fce spojitá v $y=1$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)} \underset{AL}{=} 1,$$

neboť: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} \underset{VOS}{=} 0$ („škatulníci") –

– $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$ i $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$ a $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \left(=\frac{1}{\infty}\right) = 0$

a „$\frac{\infty}{\infty}$" ? $\underline{\text{VOS}}$: $\lim_{x\to\infty}(x+\sin x) = +\infty$, neboť $x+\sin x \geqq x-1$ v $\mathcal{O}(\infty)$ a $\lim_{x\to\infty}(x-1) = \infty$

analog pro $\lim_{x\to\infty}(x-\cos x) = \infty$

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{„}0 \cdot \text{omezená"} \underset{VOS}{=} 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{„}\infty \cdot 0\text{"} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

opět – „na podíl"

$$\lim_{x\to+\infty} x(2+\sin x) = \text{„}\infty \cdot \text{nez.}\text{"} \underset{VOS\ (i)+(ii)}{=} +\infty$$

(i) $2+\sin x \geqq 1 \Rightarrow x(2+\sin x) \geqq x$ pro $x>0$ (pro $x\to\infty$ stačí)

(ii) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\cos x) = \text{„}\infty + \text{nic"} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{VOS}}}{=} +\infty$$

(i) $x + \cos x \geq x - 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$)

a nakonec: $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin x$ neexistuje!

Ukážeme pomocí Heineho věty – stačí najít dvě posloupnosti (x_n) $(\tilde{x}_n)$, $\lim x_n = \lim \tilde{x}_n = +\infty$, pro které je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) \;!$$

Vezmeme (i) $x_n = n\pi$, $\sin(n\pi) = 0$, $\lim x_n = +\infty$ a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim 0 = 0$$

(ii) $\tilde{x}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = +\infty$, ale

$$\lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot 1 = +\infty,$$

tedy, $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin x$ nemůže existovat.

Poznámky k úloze 6:

1. limit zde bylo hodně věcí", abyste si mohli přečíst a cvičit „rozbor" limit
2. U užití VLSF jsem ne vždy napsala ověření 2. předpokladu věty – učiňte tak vy – ověřte a nezapomínejte to dělat!